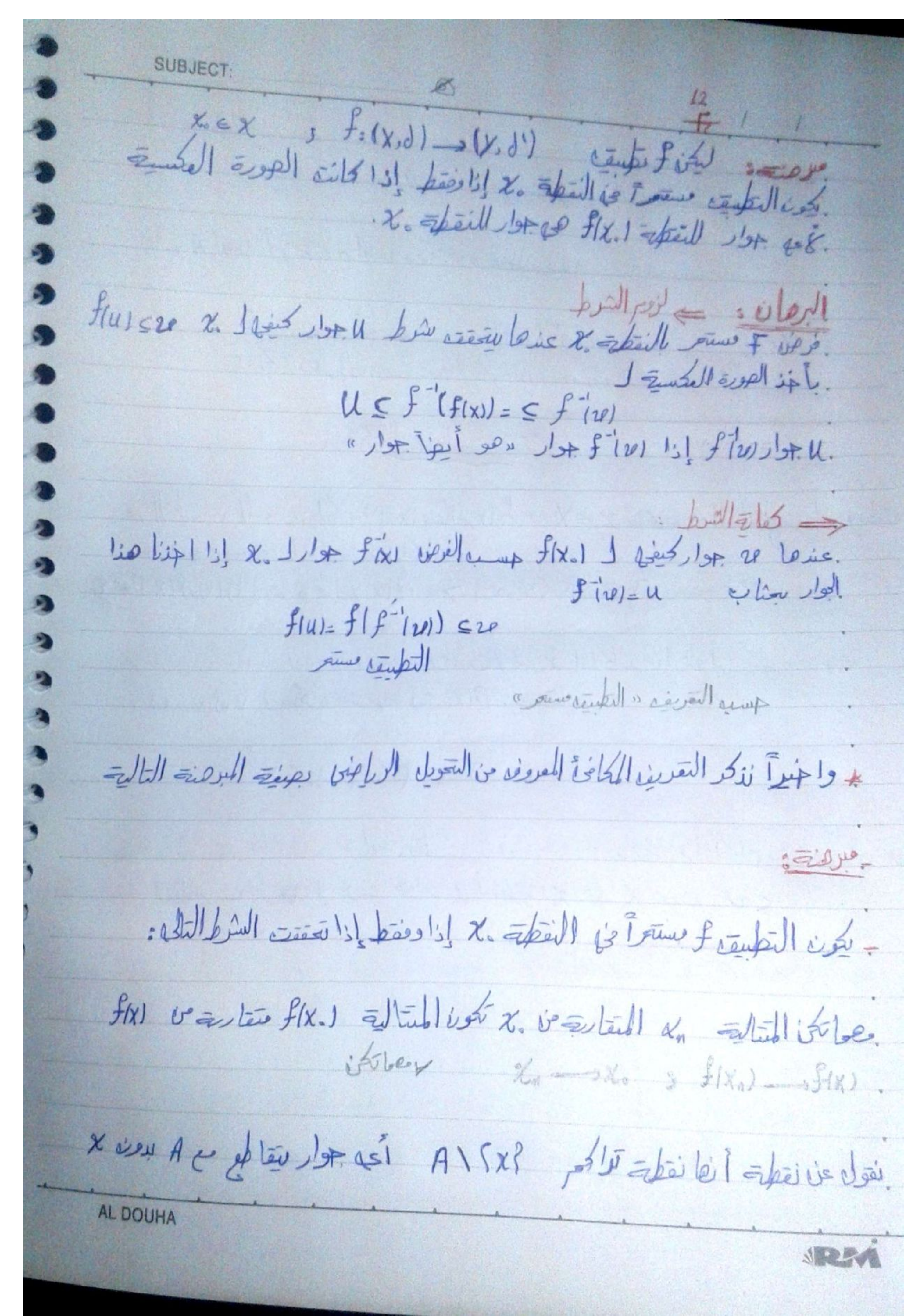


SUBJECT:

$x_0 \in X$ ، $f:(X,d) \to (Y,d')$ ليكن f تطبيق

مبرهنة: يكون التطبيق مستمراً في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي جوار للنقطة $f(x_0)$ هي جوار للنقطة x_0.

البرهان: ⟸ لزوم الشرط

فرض f مستمر بالنقطة x_0 عندها يتحقق شرط U جوار كيفي لـ x_0 $f(U) \subseteq V$

بأخذ الصورة العكسية لـ

$$U \subseteq f^{-1}(f(x)) = \subseteq f^{-1}(V)$$

U جوار $f^{-1}(V)$ إذا $f^{-1}(V)$ جوار «هو أيضاً جوار»

⟹ كفاية الشرط

عندها V جوار كيفي لـ $f(x_0)$ حسب الفرض $f^{-1}(x)$ جوار لـ x_0 إذا أخذنا هذا الجوار بمثابة $f^{-1}(V) = U$

$$f(U) = f(f^{-1}(V)) \subseteq V$$

التطبيق مستمر

حسب التعريف «التطبيق مستمر»

* وأخيراً نذكر التعريف المكافئ المعروف من التحويل الرياضي بصيغة المبرهنة التالية

مبرهنة:

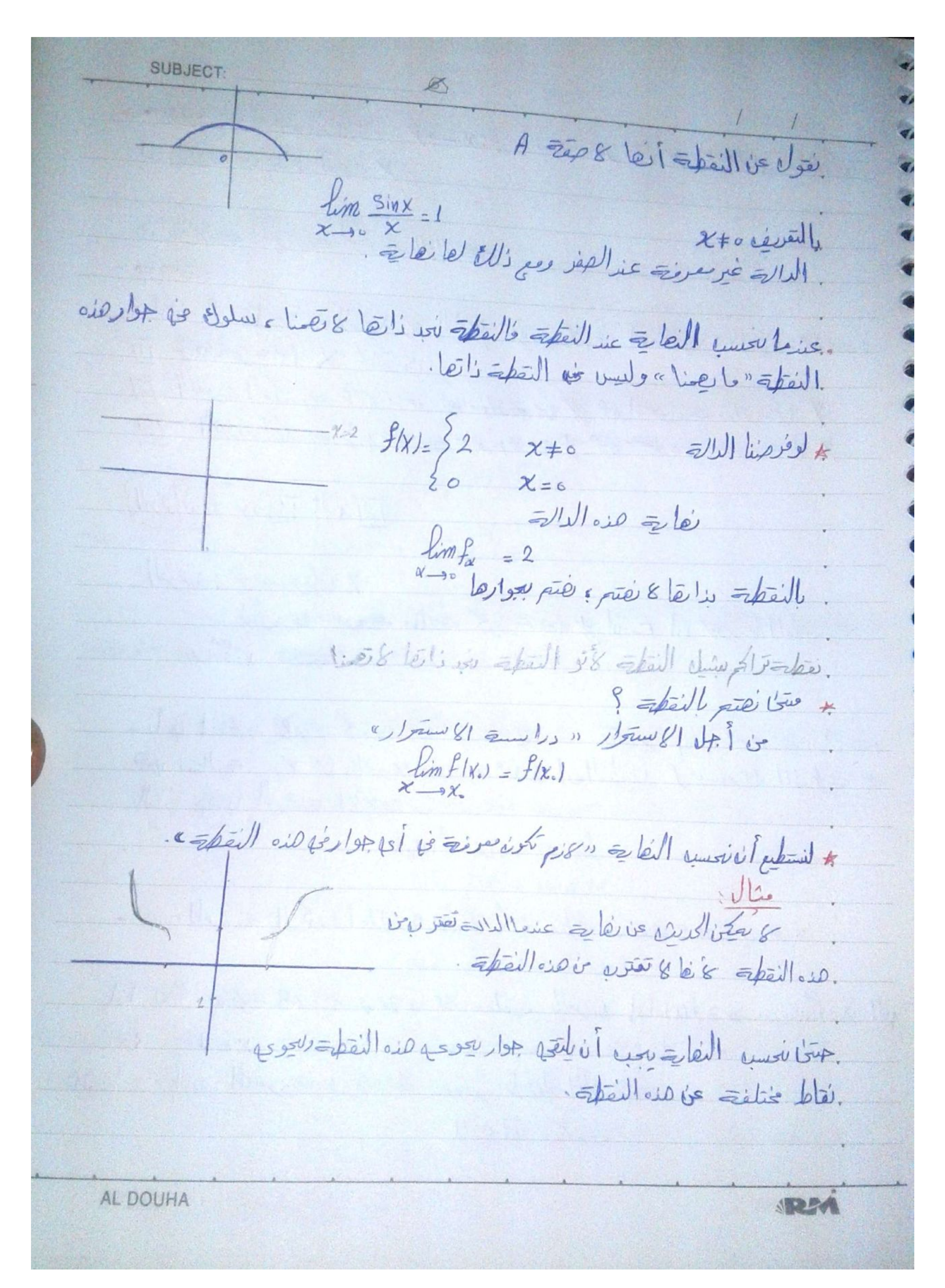
- يكون التطبيق f مستمراً في النقطة x_0 إذا وفقط إذا تحققت الشرط التالي:

مهما تكن المتتالية x_n المتقاربة من x_0 تكون المتتالية $f(x_0)$ متقاربة من $f(x)$

مهما تكن $x_n \to x_0$ ، $f(x_n) \to f(x)$

نقول عن نقطة أنها نقطة تراكم $A \setminus \{x\}$ أي جوار يتقاطع مع A بدون x

AL DOUHA



SUBJECT:

نقول عن النقطة أنها لا صفة A

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

بالتعريف $x \neq 0$

الدالة غير معرفة عند الصفر ومع ذلك لها نهاية.

عندما نحسب النهاية عند النقطة فالنقطة بحد ذاتها لا تهمنا، سلوك في جوار هذه النقطة "ما يهمنا" وليس في النقطة ذاتها.

★ لو فرضنا الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x = 2$

نهاية هذه الدالة

$$\lim_{x\to 0} f_x = 2$$

بالنقطة بذاتها لا نهتم، نهتم بجوارها

نقطة تراكم بشيل النقطة لأنو النقطة بحد ذاتها لا تهمنا!

★ متى نهتم بالنقطة؟

من أجل الاستمرار "دراسة الاستمرار"

$$\lim_{x\to x_0} f(x_0) = f(x_0)$$

★ لنستطيع أن نحسب النهاية "لازم تكون معرفة في أي جوار هذه النقطة".

مثال:

لا يمكن الحديث عن نهاية عندما الدالة تقترب من هذه النقطة لأنها لا تقترب من هذه النقطة.

حتى نحسب النهاية يجب أن يلتقي جوار يحوي هذه النقطة ويحوي نقاط مختلفة عن هذه النقطة.

SUBJECT:

★ تعريف: نقول عن التطبيق $f: X \to Y$ إنه مستمر على X إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط الفضاء X.

هذا توضحه المبرهنة المركزية التالية:

مبرهنة:

★ ليكن f تطبيقاً من الفضاء X إلى Y ، $f: X \to Y$ إن القضايا التالية متكافئة:

[1] f مستمر على X يكافئ.

[2] الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة من Y هي المجموعة مغلقة في X.

[3] الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة من Y هي مجموعة مفتوحة في X.

البرهان: من [1] إلى [2]

- الفرض: f مستمر على X

لتكن V مجموعة مغلقة كيفية في Y لنثبت أن صورتها العكسية $U = f^{-1}(V)$ مغلقة.

- نأخذ النقطة لاصقة كيفية من مجموعة U ، $x \in \bar{U}$ حسب مبرهنة سابقة:
توجد متتالية x_n من عناصر U متقاربة من x إن التطبيق f مستمر في النقطة x بالتالي حسب المبرهنة الأخيرة

$f(x_n)$ متقاربة من $f(x)$

- حسب المبرهنة المذكورة أعلاه « $f(x)$ تكون نقطة لاصقة موجودة بـ V ».

إذا $f(x)$ نقطة لاصقة بـ V و V مغلقة بالفرض إذا $f(x) \in V$ ومنه $x \in f^{-1}(V)$ التي هي $x \in U$.

★ أثبتنا أن المجموعة U تحوي جميع نقاطها اللاصقة.

$\bar{U} \subseteq U$ مغلقة

[3] ⇐ [2]

الفرض: الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة هي مغلقة

لتكن G مجموعة مفتوحة في Y

إن المجموعة $Y\setminus G$ مغلقة في Y

فرق

وحسب ②:

$f^{-1}(Y\setminus G)=$ مغلقة ب X

$$f^{-1}(Y\setminus G) = f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(G)$$

$X\setminus f^{-1}(G)$ = مجموعة مغلقة $f^{-1}(G)$ مفتوحة

[3] إلى [1]

الفرض: الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة

$x\in X$, $\mathcal{U}$ جوار كيفيا للنقطة $f(x)$ في Y

حسب التعريف الجوار: توجد مجموعة مفتوحة G بحيث $G\subseteq \mathcal{U}$ و $f(x)\in G$

حسب تعريف الجوار

$$f(x)\in G\subseteq \mathcal{U}$$
$$f^{-1}(G)\subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$$
$$x\in f^{-1}(G)\subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$$

مجموعة مفتوحة في X

بالتالي $f^{-1}(\mathcal{U})$ جوار أ لأن «يحوي مجموعة مفتوحة» لـ x الصورة العكسية لأي جوار للنقطة $f(x)$ هي جوار لـ x حسب التعريف تكافؤ تصنيف f يكون مستمر في النقطة x وبما أن x نقطة كيفية إلى مستمر في كل النقاط.